

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ד – מועד א'

הזמן: שעהיים

המורה: פרופ' עזריאל לוי

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

1. א. מהו הקשר הסמנטי בין הפסוקים $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$ ו- $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$?
ב. תן הגדרה מדויקת של היחס הקושר בין שני פסוקים אלו.
ג. הוכח שיחס זה אמנם קיים בין שני פסוקים אלו.

2. א. יהי $\mathcal{T}$ עץ האמת של פסוק ϕ . נסח והוכח תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- ϕ אינו סתירה המתייחס לסדרת הפסוקים בעלה של $\mathcal{T}$.
ב. רשום את עץ האמת של הפסוק $R \leftrightarrow (P \vee (Q \rightarrow R))$.

3. נסח והוכח את המשפט האומר שבמבנה נתון $\mathcal{A}$ ערך האמת של נוסחה ϕ בהשמה s תלוי רק בערכים שההשמה נותנת למשתנים שיש להם הופעה חופשית ב- ϕ . הנך יכול להשתמש במשפט המקביל על שמות עצם, אבל הקפד לצטט נכונה את המשפט הזה וגם את יתר משפטי העזר בהם הנך משתמש.

4. א. הגדר את מושג האיזומורפיזם של מבנים.
ב. נסח את המשפט המקשר את ערכי האמת של נוסחה ϕ בשני מבנים איזומורפיים.
ג. הוכח את המשפט לכל הנוסחאות ϕ מסדר ראשון.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

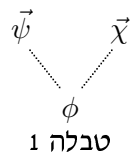
בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ד – מועד ב'

הזמן: שעהיים

המורה: פרופ' עזריאל לוי

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

- א. הגדר מהו מבנה דואלי למבנה A של תחשיב הפסוקים.
ב. בהתייחס לערכים של פסוקים במבנה A כידועים, מהו הערך אותו מקבל במבנה הדואלי ל- A פסוק ϕ' הדואלי לפסוק ϕ .
ג. תן דוגמא למסקנה מחלק ב' המתייחסת לפסוקים דואליים בלבד ולא למבנים דואליים..



- תהי Γ קבוצת פסוקים עקבית מקומית בתחשיב הפסוקים, יהי $\phi \in \Gamma$ ויהי העץ בטבלה 1 המקרה של כלל עץ האמת המתאים ל- ϕ . הוכח כי לפחות אחת מן הקבוצות $\Gamma \cup \vec{\psi}$ ו- $\Gamma \cup \vec{\chi}$ היא עקבית מקומית. מותר לך להשתמש במידע על התכונות המיידיות של כללי עץ האמת, ובלבד שתנסח באופן מלא את מה שהנך משתמש בו.

- א. הגדר מתי שם עצם t הוא כשר להצבה עבור משתנה אישי x בנוסחה ϕ .
ב. נסח את המשפט הסמנטי על ההצבה למשתנים האישיים החופשיים בנוסחה ϕ . מתוך ההוכחה של המשפט הבא רק את המקרה בו ϕ הוא בעל הצורה $\exists x_i \psi$ היכן ש- x_i הוא אחד המשתנים אשר עבורם הנך מציב.
ג. הבא דוגמא להצבה למשתנים חופשיים שאינה מקיימת את התנאי המגביל על שמות העצם $t_1, \dots, t_n$ אותם הנך מציב ושעבורה טענת המשפט אינה מתקיימת.

- הוכח בשיטות של הלוגיקה המתימטית את המשפט האומר שעל כל קבוצה A קיים יחס דו-מקומי המסדר אותה (כלומר, קיים יחס סדר שתחמו הוא A).

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ד – מועד ג'

הזמן: שתיים

המורה: פרופ' עזריאל לוי

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

1. נסח והוכח את משפט השלמות מבחינת לוחות האמת של תחשיב הפסוקים.
2. מהו המשפט הדואלי למשפט הקומפקטיות? תן לו הוכחה שאינה משתמשת בדואליות. מותר לך להשתמש בכל משפט ידוע של תורת הקבוצות ובלבד שתנסח אותו באופן מלא.
3. א. כתוב באופן מלא את הגדרת האמת לשפה המלאה מסדר שני, כולל משתני יחס ופעולה n -מקומיים.
ב. כתוב בשפה מתאימה, עם מספר קבועים שאינם עולה על 10 את האקסיומות של השדות בעלי מציין 0. על מספר האקסיומות להיות סופי.
4. א. הגדר מתי שם עצם t הוא כשר להצבה עבור משתנה אישי x בנוסחה ϕ .
ב. נסח את המשפט הסמנטי על ההצבה למשתנים האישיים החופשיים בנוסחה ϕ . מתוך ההוכחה של המשפט הבא רק את המקרה בו ϕ הוא בעל הצורה $\forall x_i \psi$ היכן ש- x_i הוא אחד המשתנים אשר עבורם הנך מציב.
ג. הבא דוגמא להצבה למשתנים חופשיים שאינה מקיימת את התנאי המגביל על שמות העצם $t_1, \dots, t_n$ אותם הנך מציב ושעבורה טענת המשפט אינה מתקיימת.

בהצלחה!